

矩阵理论

课程编号：03112101

课程中文名称： 矩阵理论

课程英文名称：Matrix Theory

课程性质：基础核心课程

开课对象：学术型硕博研究生、专业型硕博研究生

适用学科：控制学科与工程、电气工程、机械工程、电子信息等

开课学期：秋季（第 1-12 周）

学分/学时：3/48

先修课程：线性代数、高等数学/数学分析

建议后续课程：线性系统、最优控制与状态估计、人工智能等

课程负责人：王磊 执笔人：刘克新、王磊 核准院长： 王磊

一、 课程的性质、目的和任务

矩阵理论是一门理论上高度抽象、但又极具应用价值的数学基础课程。它不仅是数学的一个重要分支，而且成为现代各种科技领域处理大量有限维空间形式与数量关系的强有力的工具。本课程通过讲授矩阵的重要理论知识、计算方法和若干典型应用实例，促进学生理解并掌握数学与自然科学的基本概念和方法，达到培养学生的数学思想与数学思维、数学应用与创新能力的目的。

二、 课程内容、基本要求及学时分配

本课程主要内容有线性代数引论、矩阵分解、矩阵分析以及矩阵广义逆等。具体包括：

绪论（约 1 学时）

【基本要求】：介绍课程基本情况，了解本课程基本框架，了解矩阵理论在工程中的若干应用实例。

第一章 线性代数引论（约 6 学时）

1.1 线性空间

1.2 线性子空间

1.3 基与坐标

1.4 内积空间

1.5 直和与投影

1.6 应用：多项式插值（选讲）

【基本要求】：理解并掌握线性空间和线性子空间的基本概念；掌握基、线性无关、秩、维数等基

基础概念；掌握矩阵零空间和列空间两个基本概念；理解坐标和唯一表示定理。理解过渡矩阵的定义。理解并掌握内积空间、欧氏空间的概念，熟练掌握 Cauchy 不等式的证明方法。理解直和、正交直和、投影、正交投影的概念，并掌握其计算方法。理解并掌握正交性、正交基以及空间正交直和分解定理。掌握 Gram-Schmidt 正交化方法并理解算法的几何含义。了解酉空间和 Hermite 矩阵的定义。掌握维数定理并熟悉其证明过程。掌握直和分解的等价条件。

第二章 线性映射与矩阵（约 7 学时）

2.1 预备知识

2.2 线性映射

2.3 矩阵与同构

2.4 特征值与特征向量

2.5 酉变换与酉矩阵

2.6 应用：图的矩阵表示（选讲）

理解并掌握线性映射和线性变换概念，掌握线性变换在一组基下的矩阵的定义。了解同构映射概念，能够判断两个空间是否同构。掌握核空间和像空间的定义，掌握亏加秩定理。理解特征值与特征向量的几何含义，熟悉特征值、特征向量和特征多项式的求解算法。理解酉变换和酉矩阵的定义与性质。

第三章 矩阵分解（约 14 学时）

2.1 相抵分解

2.2 满秩分解

2.3 三角分解

2.4 QR 分解

2.5 Schur 分解

2.6 对角化分解

2.7 谱分解

2.8 Jordan 分解

2.9 奇异值分解

基本要求：了解相抵分解、三角分解的形式及其应用，了解三角分解存在的充要条件，能够对矩阵进行三角分解。掌握矩阵满秩分解、QR 分解、Schur 分解、对角化分解、谱分解、Jordan 分解以及奇异值分解。了解矩阵分解技术在典型问题中的应用。掌握投影变换与幂等矩阵之间的等价关系。

理解特征子空间的概念，掌握特征根代数重数与几何重数的概念。了解 Schur 引理的证明。理解 Hamilton-Cayley 定理，零化多项式与最小多项式的定义。掌握矩阵可对角化的几个条件。了解 λ -矩阵的定义，理解其初等变换及矩阵相抵的概念。会求 λ -矩阵的行列式因子、Smith 标准型、不变因子与初等因子。熟悉 Jordan 标准形的形式，掌握 Frobenius 定理，理解 Jordan 标准形与最小多项式的关系。

第四章 矩阵分析（约 14 学时）

4.1 向量范数

4.2 矩阵范数

4.3 相容范数

4.4 矩阵扰动分析（选讲）

4.5 特征值估计

4.6 矩阵级数

4.7 矩阵函数

4.8 函数矩阵

4.9 应用：主元分析法（选讲）

基本要求：理解范数的三条公理，熟悉几类特殊的向量范数，了解有限维空间中向量范数的等价性。理解矩阵范数的定义，熟悉矩阵范数的非负性、齐次性、三角不等式和相容性几条性质。理解矩阵的诱导范数（从属于向量范数的算子范数）的定义，熟悉几类特殊的诱导范数及相应的范数不等式。熟悉矩阵范数与谱半径的大小关系，了解其证明过程。

熟悉几个基于矩阵范数的特征值估计不等式，掌握并能够熟练应用盖尔圆盘定理。理解矩阵序列收敛的充要条件，熟悉 k 次幂矩阵收敛与谱半径之间的关系。理解矩阵序列收敛、矩阵级数收敛以及矩阵级数绝对收敛的关系。了解矩阵幂级数的 Abel 定理及其收敛半径的概念，能够判断矩阵级数的收敛性。

熟悉几类特殊的矩阵函数关系式，掌握单纯矩阵的矩阵函数的计算技巧，会利用 Sylvester 公式计算矩阵函数。熟练掌握矩阵指数函数的计算方法，如化 Jordan 标准形等方法。理解矩阵函数在矩阵谱上给定的含义，了解矩阵函数谱上一致的概念，熟练应用谱上一致多项式计算复杂矩阵函数。了解矩阵函数求导和积分的性质，了解矩阵函数对矩阵变量求导的定义，会求几类特殊矩阵函数的导数。

第五章 广义逆矩阵（约 7 学时）

5.1 基本概念

5.2 矩阵方程 $AXB=D$

5.3 减号逆

5.4 极小范数广义逆

5.5 最小二乘广义逆

5.6 广义逆矩阵 A^+

5.7 应用：区间线性规划（选讲）

基本要求：理解几类不同广义逆矩阵的定义。掌握构造减号广义逆 A^- 的方法，熟悉 A^- 的几个结论。掌握矩阵方程相容的 Penrose 定理。了解极小范数广义逆存在的充要条件，掌握求解极小范数广义逆的算法，了解矩阵极小范数广义逆与相容线性方程组极小范数解的对应关系。了解矩阵最小二乘范数存在的充要条件，了解矩阵最小二乘范数广义逆与不相容线性方程组最小二乘解的对应关系。了解广义逆矩阵 A^+ 的存在性定理，熟悉其几条基本性质。掌握通过奇异值分解、满秩分解等求解 A^+ 的方法，了解 A^+ 与极小范数最小二乘解的对应关系。了解矩阵直积的定义，熟悉矩阵直积基本性质，熟悉矩阵直积特征值的几个重要结论。了解矩阵拉直的定义。了解矩阵直积在判断矩阵方程解的存在唯一性中的应用。

三、 教学方法

本课程内容具有较强的抽象性与逻辑性，教学方法以教师为主导的启发式课堂讲授为主，同时适当增加提问、学生上讲台求解例题等环节，活跃课堂气氛并加深学生对课程内容的理解。

四、 课内外教学环节及基本要求

为了强化本课程理论结合实际的特点，引导学生将所学的矩阵理论应用于科研工作中，要求学生课程结束时提交矩阵理论应用报告 1 篇；同时，课外指定一定数量的矩阵理论的经典书籍，扩展知识面。利用仿真软件对所学的结果进行编程验证，加深对基础理论知识的理解。

五、 考核方式及成绩评定

本课程成绩由平时成绩和期末考试组合而成，采用百分计分制。各部分所占比例如下：

平时成绩占 30%，分为平时作业和矩阵理论应用报告两部分。

期末成绩占 70%，采用闭卷考试的考核方式。

六、 教材和参考资料

教材：

[1] 王磊，矩阵基本理论与应用，北京航空航天大学出版社，2021。

参考资料:

[1] 张绍飞, 赵迪, 矩阵论教程, 机械工业出版社, 2010。

[2] 戴华, 矩阵论, 北京: 科学出版社, 2001。

[3] 程云鹏, 矩阵论, 西安: 西北工业大学出版社, 2013, 第 4 版。

[4] R. Horn and C.Johnson. Matrix Analysis, Cambridge University Press , 2013, Second Edition.